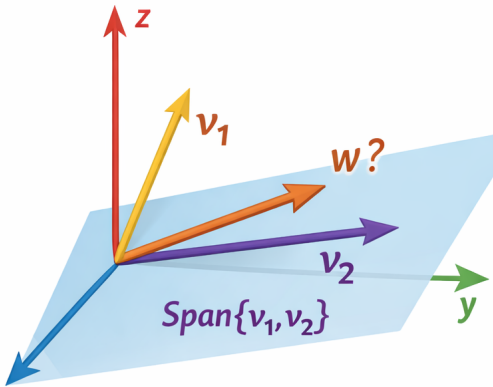
SYSTÈME AFFINE

OUSSAMA ER-RAJOUANI
Professeur de Mathématiques

Année universitaire 2025 – 2026

Le vecteur w *est-il dans le span de* v_1 *et* v_2 *?*



$$w = c_1 v_1 + c_2 v_2 \ ?$$

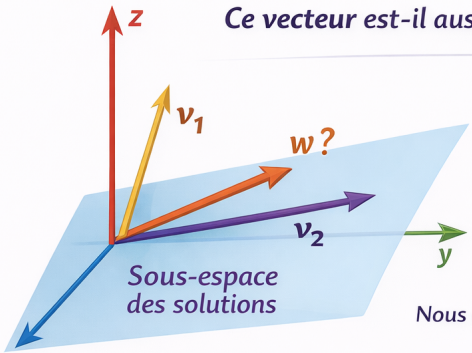
— *Combinaison linéaire ?*

c_1 *et* c_2 *: coefficients*

$c_1 v_1 + c_2 v_2 = w$

Dans le span ⟺ Combinaison linéaire des vecteurs donnés

Lien avec les systèmes linéaires homogènes



Ce vecteur *est-il aussi une solution du système ?*

?

$$Ax = 0$$

$$\begin{cases} v_1 \text{ est solution} \\ v_2 \text{ est solution} \end{cases}$$

On ne connait pas explicitement le système.

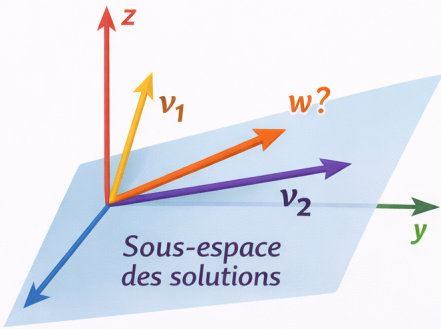
Nous connaissons plusieurs vecteurs solutions :

Système linéaire homogène ⇒ Ensemble des solutions = Sous-espaces vectoriel

Le critère du span

✓ Si dans le span des vecteurs solutions → $w = c_1 v_1 + c_2 v_2$

Combinaison linéaire de solutions



✓ Attention :

Un vecteur pas dans le span

≠ pas forcèment pas solution

✗ Pas dans le span → ⚠ Ciluza

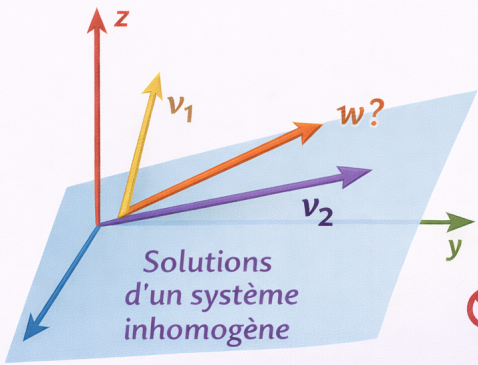
Dans le span ⇒ Solution garantie

Un vecteur pas dans le span ≠ pas forcément pas solution

Ça peut aussi juste vouloir dire que nos vecteurs connus ne génèrent pas toutes les solutions

Cas d'un système inhomogène

Les solutions v_1 et v_2 ne génèrent pas un sous-espace $Ax = b$



$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 = (0,0,0)$

$0 = (0,0,0)$ ← Pas solution d'un systéme inhomogéne

$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 = (0,0,0)$

L'ensemble des solutions ≠ Sous-espace vectoriel **Le span** ne marche plus

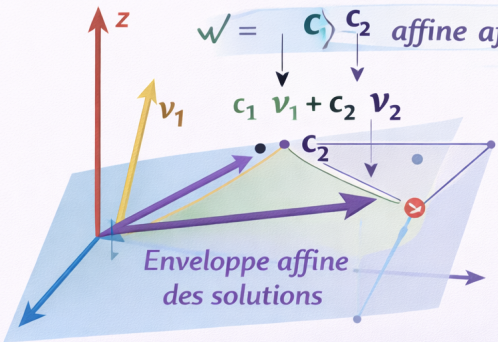
Ça peut aussi juste uvoloir dire que nos vecteues connus ne génèrent pas toutes les solutions

La solution : le span affine

Dans ce cas, on utilise la notion de ***span affine*** :

$$c_1 + c_2 = 1$$

Combinaisons affines



– *Les solutions d'un système inhomogène forment un espace affine.*

Intuitivement :

– *Au lieu de combinaisons linéaires où les coefficients peuvent être n'importequsit,*

✓ **Coefficient d'affinité** : $c_1 v_1 + c_2 v_2$ avec $c_1 + c_2 = 1$

(i) : c ole, tion d'un système inhomogène

Span affine = *Enveloppe affine*

2 Reformulation comme un système linéaire

Étant donnés des vecteurs $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ *et un autre vecteur* $u \in \mathbb{R}^n$.

Pour savoir si u *est dans le span affine, on doit trouver des réels* $\lambda_1 \dots, \lambda_k$, *qui vérifient deux conditions simultanément :*

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = u$$
$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_k \end{pmatrix}^{\intercal} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = u$$

C'est un système linéaire en les inconnues $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Écriture matricielle

On peut écrire :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^{\intercal} = 1$$

Ou → u est dans le span affine

Non → u n'y est pas

4 Définition équivalente (géométrique)

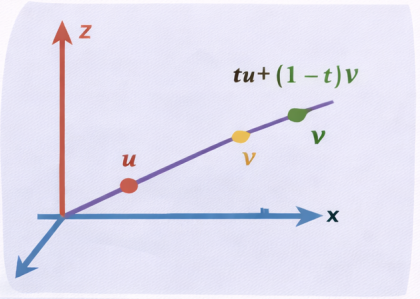
On peut reformuler la définition précèdente.

Un ensemble V *est un* ***sous-espace vectoriel*** *si et seulement si :*

- $0 \in V$
- *pour tous* $u, v \in V$ *et tout* $t \in \mathbb{R}$, $tu + (1-t)v \in V$

Pourquoi cette forme ?

$tu + (1-t)v$ *est une combinaison affine, elle décrit la droite passant par* u *et* v.



Donc :

Un sous-espace vectoriel ***contient toute la droite passant par deux de ses points.*** *C'est une caractèrisation géométrique.*

5 Définition d'un espace affine

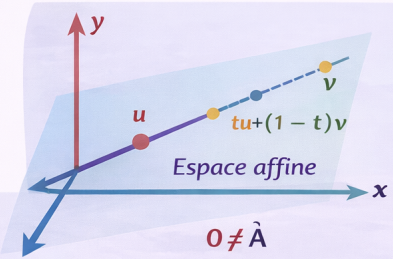
On utilise maintenant cette forme pour définir un espace affine.

Définition

Un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est un ***espace affine*** si :

- $\forall u, v \in A, \forall t \in \mathbb{R}$,
- $tu + (1-t)v \in A$

❌ *On n'exige plus que* $0 \in A$



Intuition

Un *espace affine* contient toutes les droites entre ses points.

Mais il ne passe pas forcément par l'origine.

👉 *C'est un* ***sous-espace vectoriel déplacé.***

Un espace ***affine*** *contient toutes les droites entre ses points*

Mais il ne passe pas forcément ***par l'origine***.

6 Exemple fondamental : systèmes linéaires inhomogènes

Considérons un système :

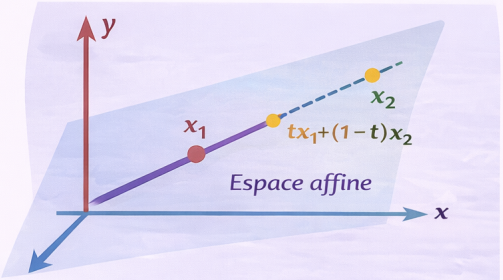
$$Ax = b \ (b \neq 0)$$

🚫 L'ensemble **des solutions** n'est pas un **sous-espace vectoriel**

✅ Mais c'est un **espace affine**

❓ **Pourquoi ?**

Si x_1 et x_2 sont solutions,
alors **toute combinaison affine**
$tx_1 + (1-t)x_2$ est aussi solution



👉 Si x_1 et x_2 sont **solutions**, alors **toute combinaison affine** $tx_1 + (1-t)x_2$ est aussi solution

→ *C'est un* **sous-espace vectoriel déplacé.**

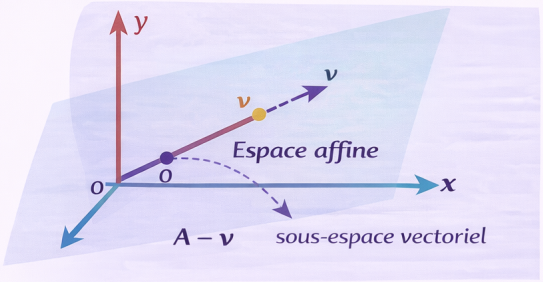
7 Lien entre espace affine et sous-espace vectoriel

Théorème fondamental

Un ensemble A est un **espace affine** si et seulement si :

$$\exists\, v \in A \text{ tel que } A - v = \{u - v \mid u \in A\}$$

est un **sous-espace vectoriel**.



Si x_1 et x_2 sont **solutions**, alors *toute combinaison affine* $tx_1 + (1-t)x_2$ est aussi solution.

Merci pour votre attention !

Questions ?

OUSSAMA ER-RAJOUANI
Professeur de Mathématiques